Un max de maths - Zavidovique (p. 49)

Surjectivité de l'exponentielle matricielle

156 153
204 214

Théorème : (d'inversion locale) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^1$ tel que $d_a f \in GL(\mathbb{R}^n)$.
Alors : $\exists V \in \mathcal{V}_a \mid \exists W \in \mathcal{V}_{f(a)} \mid f : V \to W$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Théorème : $\exp : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C}) \\ C \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C^k}{k!} \end{array}$ est surjective

Preuve :
Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

L'idée pour ce développement va être de montrer 4 points clés :
(1) $\exp : \mathbb{C}[C] \to \mathbb{C}[C]^\times$ est un morphisme
(2) $\mathbb{C}[C]^\times$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}[C]$
(3) $\exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{C}[C]^\times$
(4) Conclure.

① Montrons que $\exp : \mathbb{C}[C] \to \mathbb{C}[C]^\times$ est un morphisme de groupes.

- $\exp(C) \in \mathbb{C}[C]$ comme limite de polynômes en C de $\mathbb{C}[C]$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donc fermé.
- $\mathbb{C}[C]^\times = \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$
  $\subseteq$ Par définition : $\mathbb{C}[C]^\times = \{A \in \mathbb{C}[C] \mid A \text{ inversible}\}$
  $\supseteq$ Soit $M \in \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$. M^{-1} est un polynôme en M (par le théorème de Cayley-Hamilton). Alors M^{-1} est un polynôme en C qui est de plus inversible i.e. $M^{-1} \in \mathbb{C}[C]^\times$.
- Puisque $\mathbb{C}[C]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la restriction de exp à $\mathbb{C}[C]$ est bien un morphisme de groupes à valeurs dans $\mathbb{C}[C]^\times = \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$.

② Montrons que $\mathbb{C}[C]^\times$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}[C]$

- Ouvert car $\mathbb{C}[C]^\times = \mathbb{C}[C] \cap \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ avec det application continue et $\mathbb{C}^*$ ouvert.
- Connexe car connexe par arcs.
  Soit $M, N \in \mathbb{C}[C]^\times$, $P : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \det(zM + (1-z)N) \end{array}$ polynomiale en z non-identiquement nulle.
  P s'annule alors en un nombre fini de points. Il suffit alors de construire un chemin esquivant ces points.

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $z_a : \begin{array}{l} [0;1] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto t + ia(1-t) \end{array}$
Alors le chemin $\gamma : \begin{array}{l} [0;1] \to \mathbb{C}[C] \\ t \mapsto z_a(t)M + (1 - z_a(t))N \end{array}$ convient.

③ Montrons que $\exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{C}[C]^\times$

- Ouvert
  $d_{0_n}\exp = I_n$ donc $d_{0_n}\exp$ est inversible
  De plus, $\exp \in \mathcal{C}^1$. Par le théorème d'inversion locale, $\exists U \in \mathcal{V}_{0_n} \mid \exists V \in \mathcal{V}_{I_n} \mid \exp : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
  Soit $A \in \mathbb{C}[C]$. Comme $\exp|_{\mathbb{C}[C]}$ est un morphisme, $\exp(A+U) = \exp(A)V$.
  Puisque $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{C})$, l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{C}[C]^\times \to \mathbb{C}[C]^\times \\ M \mapsto \exp(A)^{-1}M \end{array}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et alors :
  $\exp(A)V = f^{-1}(V)$ est ouvert dans $\mathbb{C}[C]^\times$
  Par ailleurs, $I_n \in V$ donc $\exp(A) \in \exp(A)V \in \mathcal{V}_{\exp(A)}$.
  Ceci étant vrai pour tout $A \in \mathbb{C}[C]$, on a :
  $\exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert dans $\mathbb{C}[C]^\times$.
- Fermé
  $\mathbb{C}[C]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[C]) = \bigcup_{A \in \mathbb{C}[C]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[C])} A\exp(\mathbb{C}[C])$. En effet,

admis

  $\subseteq$ $0_n \in \mathbb{C}[C]$ donc $\exp(0_n) = I_n \in \exp(\mathbb{C}[C])$
  Alors $\mathbb{C}[C]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[C]) \subseteq \bigcup_{A \in \mathbb{C}[C]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[C])} A\exp(\mathbb{C}[C])$
  $\supseteq$ Soit $B \in \bigcup_{A \in \mathbb{C}[C]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[C])} A\exp(\mathbb{C}[C])$
  Ainsi, $B = A\exp(U)$ pour $U \in \exp(\mathbb{C}[C])$
  Supposons par l'absurde que $B \in \exp(\mathbb{C}[C])$
  Alors $B = \exp(V)$ pour $V \in \exp(\mathbb{C}[C])$.
  donc : $A = \exp(V - U) \in \exp(\mathbb{C}[C])$
  ABSURDE
  Alors $\bigcup_{A \in \mathbb{C}[C]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[C])} A\exp(\mathbb{C}[C]) \subseteq \mathbb{C}[C]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[C])$.

  Par ailleurs, soit $A \in \mathbb{C}[C]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[C])$.
  En particulier, $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et alors l'application $g : \begin{array}{l} \mathbb{C}[C] \to \mathbb{C}[C] \\ X \mapsto A^{-1}X \end{array}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
  Alors $A\exp(\mathbb{C}[C]) = g^{-1}(\exp(\mathbb{C}[C]))$ avec g continue et $\exp(\mathbb{C}[C])$ ouvert donc $A\exp(\mathbb{C}[C])$ ouvert et alors $\bigcup_{A \in \mathbb{C}[C]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[C])} A\exp(\mathbb{C}[C])$ ouvert, d'où $\mathbb{C}[C]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[C])$ ouvert dans $\mathbb{C}[C]^\times$.
  Finalement, $\exp(\mathbb{C}[C])$ est fermé dans $\mathbb{C}[C]^\times$.

④ Montrons que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjectivité.
Par connexité, $\exp(\mathbb{C}[C]) = \mathbb{C}[C]^\times$.
Soit $C \in GL_n(\mathbb{C})$. Puisque $C \in \mathbb{C}[C]$, on a : $C \in \mathbb{C}[C]^\times$.
Par ce qui précède, $C \in \exp(\mathbb{C}[C])$.

Lemme : (théorème des fonctions implicites)
Soit $\Omega \subseteq E \times F$ ouvert, $f : \Omega \to F \in \mathcal{C}^1$ et $(x_0;y_0) \in \Omega$ tel que $f(x_0;y_0)=0$ et $\partial_y f(x_0;y_0)$ inversible.
Alors : $\exists U \in \mathcal{V}_{x_0} \setminus \exists V \in \mathcal{V}_{y_0} \setminus \exists \varphi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : $\begin{cases}(x;y) \in U \times V \\ f(x;y)=0\end{cases}$ ssi $\begin{cases} x \in U \\ y = \varphi(x)\end{cases}$

De plus, $\forall x \in U$, $d_x \varphi = -(\partial_y f(x;\varphi(x)))^{-1} \circ \partial_x f(x;\varphi(x))$

Preuve :

- Résolubilité de $f(x;y)=0$

Soit $g(x;y) = y - (\partial_y f(x_0;y_0))^{-1} \circ f(x;y)$
Par composition, $g \in \mathcal{C}^1$ sur Ω et $f(x;y)=0$ ssi $g(x;y)=y$.
Ainsi, il faut trouver les points fixes de $g(x;\cdot)$.
$\forall x,y \in \Omega$, $\partial_y g(x;y) = id_F - (\partial_y f(x_0;y_0))^{-1} \circ \partial_y f(x;y)$
et alors $\partial_y g(x_0;y_0) = 0$. Par continuité de $\partial_y g$,
$\exists \alpha > 0 \setminus (\|x-x_0\|_E \leq \alpha$ et $\|y-y_0\|_E \leq \alpha) \Rightarrow |||\partial_y g(x;y)||| \leq \frac{1}{2}$
Par le TAF, g est $\frac{1}{2}$-contractante sur $\overline{B(x_0;\alpha)} \times \overline{B(y_0;\alpha)}$

$$\begin{aligned}\|g(x;y)-y_0\| &= \|g(x;y)-g(x_0;y_0)\| \\ &\leq \|g(x;y)-g(x;y_0)\| + \|g(x;y_0)-g(x_0;y_0)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|y-y_0\| + \|g(x;y_0)-g(x_0;y_0)\| \\ &\leq \frac{\alpha}{2} + \|g(x;y_0)-g(x_0;y_0)\|\end{aligned}$$

Par continuité de g, $\exists \alpha' > 0 \setminus \|x-x_0\| < \alpha' \Rightarrow \|g(x;y_0)-g(x_0;y_0)\| < \frac{\alpha}{2}$
Ainsi, g restreinte à $\overline{B(x_0;\alpha')} \times \overline{B(y_0;\alpha)}$ est à valeurs dans $\overline{B(y_0;\alpha)}$. Par le théorème de point fixe à paramètre, $\forall x \in \overline{B(x_0;\alpha')}$, $\exists! y \in \overline{B(y_0;\alpha)} \setminus g(x;y)=y$
Il existe alors $\tilde{\varphi} : B(x_0;\alpha') \to B(y_0;\alpha)$ continue telle que $f(x;y)=0$ ssi $y=\tilde{\varphi}(x)$.
Soit $V = B(y_0;\alpha)$ et $U = \tilde{\varphi}^{-1}(V)$ ouvert.
Ainsi, $\varphi = \tilde{\varphi}_{|U}$ convient.

- Différentiabilité de φ en x_0

Puisque f est différentiable en $(x_0;y_0)$,
$f(x_0+h;y_0+k) = f(x_0;y_0) + \partial_x f(x_0;y_0)(h) + \partial_y f(x_0;y_0) + \|(h;k)\| \varepsilon(h;k)$
avec $h = x - x_0$ et $k = \varphi(x) - \varphi(x_0)$, on a :
$$f(x;\varphi(x)) - \underbrace{f(x_0;y_0)}_{=0} = \partial_x f(x_0;y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0;y_0)(\varphi(x)-y_0) + \|(x-x_0, \varphi(x)-y_0)\| \eta(x)$$
En appliquant $\partial_y f(x_0;y_0)^{-1}$, on a :
$\varphi(x) - \varphi(x_0) = -[\partial_y f(x_0;y_0)^{-1} \circ \partial_x f(x_0;y_0)](x-x_0) + C(x)$
avec $C(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ d'où :
$d_{x_0}\varphi = -\partial_y f(x_0;y_0)^{-1} \circ \partial_x f(x_0;\varphi(x_0))$

- φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U

Comme $\partial_y f$ est continue et inversible en $(x_0;y_0)$, $(x;y) \mapsto \det(\partial_y f(x;y))$ est non-nulle et continue autour de $(x_0;y_0)$. Ainsi, quitte à diminuer le domaine de définition de $\varphi : U$ et V, ops $\forall x,y \in U \times V$, $\partial_y f(x;y)$ inversible.
En reprenant le raisonnement précédent en x,
$d_x \varphi = -\partial_y f(x;\varphi(x))^{-1} \circ \partial_x f(x;\varphi(x))$
Par hypothèse de continuité sur df, le membre de droite est continu et φ est $\mathcal{C}^1$ sur U.

Théorème : (d'inversion locale) Soit $\emptyset \neq U \subseteq E$ ouvert, $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $x_0 \in U$ tq : $d_{x_0} f : E \to F$ isomorp.
Alors : $\exists U' \in \mathcal{V}_{x_0} \setminus \exists V' \in \mathcal{V}_{y_0} \setminus f : U' \to V'$ est un $\mathcal{C}^k$-difféo.
De plus, $\forall y \in V'$, $d_y f^{-1} = [d_{f^{-1}(y)} f]^{-1}$ $f(x_0)=y_0$

Preuve :
Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} U \times F & \to & F \\ (x;y) & \mapsto & y - f(x)\end{array} \in \mathcal{C}^k$.
$\partial_x \Phi(x;y) = -d_x f$; $\Phi(x_0;y_0)=0$ et $\partial_x \Phi(x_0;y_0)$ est inversible.
Par le théorème des fonctions implicites, $\exists U' \in \mathcal{V}_{x_0} \setminus \exists V' \in \mathcal{V}_{y_0} \setminus \exists \varphi : V' \to U'$ de classe $\mathcal{C}^k$ tq :
$\begin{cases}(x;y) \in U' \times V' \\ y - f(x) = 0\end{cases}$ ssi $\begin{cases} x \in U' \\ x = \varphi(y)\end{cases}$

Comme $f(\varphi(y)) = y$, φ coïncide avec la bijection réciproque de f sur V'. i.e. $\varphi = f^{-1}$
De plus, $d_{\varphi(y)} f \circ d_y \varphi = id$ d'où la formule.

Temps :
12'12" speechless
13'29"